Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Департамент научно-технологической политики и образования
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Донской государственный аграрный университет»
(ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

МАТЕМАТИКА :
ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Для обучающихся по направлениям подготовки бакалавриата

Новочеркасск
2019

УДК 51
ББК 22.1
М 34

Рецензент: Баленко Е.Г. канд. с/х. наук, зав.кафедрой естественнонаучных дисциплин, Донской ГАУ.

М 34 Математика : типовые задачи теории вероятностей : методические указания к практическим занятиям, для обучающихся по направлениям подготовки бакалавриата. / сост. А.Г. Мокриевич ; Донской ГАУ. – Персиановский : Донской ГАУ, 2019. – 36 с.

В работе рассмотрены методы решения типовых задач теории вероятностей. Приведены методические указания, примеры выполнения задач и задания для самостоятельной работы студентов.

Методические указания предназначены для студентов направлений подготовки: 35.03.04 Агрономия, 35.03.05 Садоводство, 05.03.06 Экология и природопользование очной и заочной форм обучения. Методические указания могут быть использованы студентами других направлений подготовки.

УДК 51
ББК 22.1

Библиография – 3 наименований.

Утверждено на методической комиссии агрономического факультета (протокол № 8 от 24.05.2019).

Рекомендовано к изданию методическим советом Донского ГАУ (протокол № 4 от 30.05.2019).

Оглавление

1. Случайные события

1.1. Классическое определение вероятности

Испытанием (опытом, экспериментом) называется реализация определенного четко описанного комплекса условий. При повторении испытания необходимо выполнить все условия данного испытания.

Событием в теории вероятностей называется любой факт, который может произойти или не произойти в результате испытания. События обозначают заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C. \; .\;.\;.\;. \; Z.$

Событие называется *достоверным*, если оно должно обязательно произойти в результате испытания.

Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в результате испытания.

Событие называется *случайным* или возможным, если оно может произойти или не произойти в условиях одного и того же испытания. Например, при подбрасывании монеты могут осуществиться два случайных события: выпадение «герба» или выпадение «цифры». Каждое случайное событие есть следствие неопределенности рассматриваемой ситуации. Однозначное предсказание результатов испытаний в условиях неопределенности невозможно. Однако в теории вероятностей вводится мера возможности того или иного события, а именно вероятность этого события. Вычисление вероятностей случайных событий является интересной и важной задачей. Решение этой задачи позволяет существенно прояснить ситуацию и делать вероятностные прогнозы.

Несколько событий называются *несовместными*, если никакие два из них не могут наступить вместе в одном и том же испытании, в противном случае события называются *совместными.*

Несколько событий образуют *полную группу*, если хотя бы одно из них обязательно должно произойти в результате испытания.

События называются *равновозможными* в некотором испытании, если нет объективных оснований считать, что какое- либо из них более возможно чем другие.

Несколько событий называются *случаями* или шансами, если они:
1) являются элементарными (простейшими); 2) образуют полную группу событий; 3) несовместны; 4) равновозможны.

Если результаты некоторого испытания удовлетворяют перечисленным требованиям, т.е. являются случаями, то говорят, что такое испытание сводится к *схеме случаев.*

События A и $\bar{A}$ называются *противоположными,* если они несовместны и образуют полную группу. Одно из противоположных событий обязательно должно произойти.

Вероятность события есть численная мера объективной возможности появления этого события. Вероятность события A обозначается $P(A)$.

Случай называется *благоприятствующим* событию A, если появление этого случая влечет за собой появление события A.

Если испытание сводится к схеме случаев, то вероятность появления любого события (A) в этом испытании можно вычислить по формуле:

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

где n – общее число случаев;

m – число случаев, благоприятствующих событию A.

Формула (1) представляет собой классическое определение вероятности.

Приведем основные свойства вероятности:

1) вероятность любого события заключается между нулем и единицей

$$0\le P(A)\le 1;$$

2) равновозможные события равновероятны;

3) вероятность противоположного события вычисляются по формуле:

$$P(\overline{A})=1-P(A). \qquad (2)$$

Примеры выполнения типовых заданий

Задача 1. В корзине лежат 3 червивых и 7 не червивых яблок. Из корзины извлекают наугад одно яблоко. Найти вероятности того, что извлеченное яблоко: 1) червивое; 2) не червивое.

Решение. Обозначим через A_i событие, состоящее в извлечении i –того яблока, через B – червивого яблока, через C – не червивого яблока.

События $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ являются случаями, т.к. они являются элементарными, образуют полную группу, несовместны и равновозможны. Испытание, состоящее в извлечении из корзины яблока, сводится к схеме случаев, поэтому можно воспользоваться формулой (1):

$$P(B)=\frac{m_B}{n}; \qquad P(C)=\frac{m_C}{n}.$$

Общее число случаев (n) равно 10. Число случаев благоприятствующих событию $B(m_в)$ равно 3, т.к. в корзине всего 3 червивых яблока. Число случаев благоприятствующих событию $C(m_c)$ равно 7. Следовательно:

$$1)\ P(B)=\frac{3}{10}=0{,}3; \qquad 2)\ P(C)=\frac{7}{10}=0{,}7.$$

Отметим также, что события B и C являются противоположными и поэтому

$$P(B)=P(\overline{C})=1-P(C) \quad \text{и} \quad P(C)=P(\overline{B})=1-P(B).$$

Задача 2. Монета подбрасывается два раза. Найти вероятности того, что: 1) «герб» выпадет один раз; 2) «цифра» выпадет два раза.

Решение. Обозначим выпадение «герба» буквой *Г*, а выпадение «цифры» буквой *Ц*. Тогда в результате указанного испытания возможны следующие результаты:

соб. A_1 – ГГ, соб. A_2 – ГЦ, соб. A_3 – ЦГ, соб. A_4 – ЦЦ.

Требуется найти вероятности событий B – выпадение «герба» один раз и C – выпадение «цифры» два раза.

События A_1, A_2, A_3, A_4 являются случаями, поэтому можно воспользоваться классическим определением вероятности.

1) Событию B благоприятствуют два случая: A_2 и A_3, а общее число случаев равно четырем.

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{2}{4}=0{,}5.$$

2) Событию С благоприятствует только один случай – A_4.

$$P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Являются ли равновозможными события A и B:

1) испытание – бросание игральной кости; события: A – выпадение нечетной цифры 2; B – выпадение четной цифры;

2) испытание – извлечение одной игральной карты; события: A – эта карта туз; B – эта карта король.

2. Образуют ли полную группу события A_i:

1) испытание – подбрасывание монеты; события: A_1 – выпадение цифры; A_2 – выпадение герба;

2) испытание – три выстрела по мишени; события: A_1 – нуль попаданий; A_2 – одно попадание; A_3 – два попадания; A_4 – три попадания?

Являются ли эти события попарно несовместными?

3. Являются ли случаями следующие группы событий:

1) испытание – бросание игральной кости; события: A_1 – выпадение четной цифры; A_2 – выпадение нечетной цифры;

2) испытание – выстрел по мишени; события: A_1 – промах; A_2 – попадание.

4. В клетке 8 белых и 5 серых кроликов. Найти вероятности того, что после открытия клетки первым выскочит: 1) белый кролик; 2) серый кролик.

5. Брошены две игральные кости. Найти вероятности того, что сумма выпавших очков окажется: 1) равной пяти; 2) меньшей четырех.

6. В стаде 300 коров, из них 80 не превышают трехлетнего возраста, 50 коров имеют возраст свыше пяти лет. Наугад отбирают одну корову. Каковы вероятности того, что возраст коровы: 1) более трех лет; 2) не более пяти лет?

7. В вазе 3 красных, 5 зеленых и 4 желтых яблока. Наугад извлекают одно. Найти вероятности того, что яблоко окажется: 1) красным; 2) не зеленым.

8. Подброшены три монеты. Каковы вероятности того, что выпадут:
1) три цифры; 2) две цифры и герб?

9. Колода состоит из 36 игральных карт. Наугад извлекают одну карту. Найти вероятности того ,что эта карта: 1) туз; 2) червовой масти; 3) пиковая дама.

10. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. После перемешивания наугад извлекают один кубик. Каковы вероятности того, что у извлеченного кубика: 1) три окрашенных грани; 2) нет окрашенных граней; 3) одна окрашенная грань?

1.2. Вычисление вероятностей событий с использованием понятий комбинаторики

При решении целого ряда задач теории вероятностей, когда испытание сводится к схеме случаев и число случаев велико можно использовать формулы комбинаторики.

Пусть имеется множество, состоящее из n *различных* элементов:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \tag{3}$$

Произвольное неупорядоченное подмножество некоторого множества элементов называется *сочетанием.* Если неупорядоченное подмножество включает m элементов множества (3), то его называют сочетанием из n элементов по m . Число различных сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{4}$$

или $$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}.$$

В частности $C_n^0 = 1; \quad C_n^n = 1; \quad C_n^1 = n.$

Восклицательный знак означает факториал числа. Напомним, что

к! = 1· 2 · 3 …(к - 1) · к;   0! =1.

Произвольное упорядоченное подмножество некоторого множества называется *размещением*. Если размещение включает m элементов множества (3), то его называют размещением из n элементов по m. Число различных размещений обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{5}$$

или $$A_n^m = n \cdot (n-1)\ldots(n-m+1).$$

Например, для множества $\{a_1, a_2, a_3\}$ можно составить три различных сочетания содержащих по два элемента: $\{a_1, a_2\}$; $\{a_1, a_3\}$; $\{a_2, a_3\}$ и шесть различных размещений: $\{a_1, a_2\}$; $\{a_2, a_1\}$; $\{a_1, a_3\}$; $\{a_3, a_1\}$; $\{a_2, a_3\}$; $\{a_3, a_2\}$.

Действительно, $C_3^2=\dfrac{3!}{2!1!}=\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1}=3;\quad A_3^2=\dfrac{3!}{1!}=\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{1}=6$.

Произвольное упорядоченное множество называется *перестановкой.* Число различных перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле:

$$P_n = n! \qquad (6)$$

Например, можно составить шесть перестановок из трех элементов множества {кукуруза, ячмень, пшеница}, т.к. $P_3 = 3! = 6$.

Примеры выполнения типовых заданий

Задача 3. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Число отличающихся друг от друга комбинаций из десяти арабских цифр по три цифры равно числу размещений из десяти элементов по три.

$$A_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!}=10\cdot 9\cdot 8=720.$$

По условию задачи все допустимые комбинации трех цифр равновозможны, несовместны и образуют полную группу случаев.

Событие A – набраны нужные цифры. Ему благоприятствует лишь один случай:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{A_{10}^3}=\frac{1}{720}\approx 0{,}0014.$$

Задача 4. В ящике находится 20 плодов, из которых 4 поражены болезнью. Из ящика наудачу извлекают 4 плода. Найти вероятность того, что среди извлеченных плодов: 1) нет пораженных болезнью; 2) два поражены болезнью.

Решение. Общее число способов извлечения четырех плодов из двадцати равно числу сочетаний из двадцати элементов по четыре - C_{20}^4. Все эти сочетания равновозможны, несовместны и образуют полную группу случаев.

Событие A – среди четырех извлеченных плодов нет больных. Ему благоприятствуют все возможные сочетания из шестнадцати здоровых плодов по четыре $/C_{16}^4/$. Событие B – среди четырех плодов два больных. Ему благоприятствуют все возможные комбинации: содержащие по два больных плода и два здоровых. Число различных комбинаций двух больных плодов равно C_4^2, т.к. всего четыре больных плода. С каждой такой комбинацией может быть извлечено любое возможное сочетание двух здоровых плодов из шестнадцати. Значит число благоприятствующих случаев для события В равно $C_4^2\cdot C_{16}^2$.

1) $P(A)=\dfrac{m_A}{n}=\dfrac{C_{16}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{1820}{4845}\approx 0{,}3756;$ 2) $P(B)=\dfrac{m_B}{n}=\dfrac{C_4^2\cdot C_{16}^2}{C_{20}^4}=\dfrac{6\cdot 120}{4845}\approx 0{,}1486.$

Задания для самостоятельной работы

11. В скольких трехзначных числах цифры не повторяются?

12. Вычислить: 1) $C_3^2 + C_8^3$; 2) $A_4^2 + P_6$.

13. Решить уравнение $C_{x-2}^2 = 21$.

14. Из шести лучших свиноматок надо выбрать трех для выставки. Сколькими способами это можно сделать?

15. В хозяйстве 5 участков земли, которые необходимо занять пятью культурами. Сколькими способами можно распределить культуры по участкам?

16. В группе 12 студентов, среди которых 5 юношей. По списку наугад отбирают четверых студентов. Найти вероятности того, что среди отобранных: 1) нет юношей; 2) три юноши.

17. В клетке находятся 6 белых и 4 серых мыши. Наугад отбирают 2 мыши. Найти вероятности того, что среди отобранных мышей: 1) обе мыши белые; 2) одна мышь белая и одна серая.

18. В компании 7 друзей. Места за столом распределяются по жребию. Какова вероятность того, что Коля сядет рядом с Олей?

19. В загоне находятся 8 поросят северокавказской породы и 5 поросят крупной белой породы. Найти вероятность того, что среди трех наугад отобранных поросят окажется хотя бы один поросенок северокавказской породы.

20. В читальном зале имеется 7 разных учебников по теории вероятностей, из которых три в мягком переплете. Студент наугад берет три учебника. Найти вероятности того, что среди выбранных учебников: 1) три учебника в жестком переплете; 2) два учебника в жестком переплете; 3) хотя бы один учебник в мягком переплете.

Задачи 21-40. В урне содержатся К черных и Н белых шаров. Случайным образом вынимают М шаров. Найти вероятность того, что среди них имеется:
а) Р белых шаров;
б) меньше, чем Р белых шаров.

3.3. Вычисление вероятностей составных событий

Суммой или объединением двух событий называется новое событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий. Например, $C = A + B$ или $C = A \bigcup B$.

Произведением или пересечением двух событий называется новое событие, состоящее в совместном появлении этих событий. Например, $D = A \cdot B$ или $D = A \bigcap B$.

Вероятность появления суммы двух *несовместных* событий равна сумме вероятностей появления этих событий, т.е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \ . \tag{7}$$

Вероятность появления суммы двух *совместных* событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, т.е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \, . \tag{8}$$

Вероятность появления события А при условии, что событие В уже произошло, называется *условной вероятностью* события А и обозначается $P_B(A)$ или $P(A/B)$.

Два события называются *независимыми,* если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого. В противном случае события называются *зависимыми*. Если события А и В независимы, то

$$P_B(A) = P_{\overline{B}}(A) = P(A) \qquad \text{и} \qquad P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B) \, .$$

Вероятность произведения (совместного появления) двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже произошло, т.е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) \tag{9}$$

или $\quad P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Если события А и В *независимы,* то из (9) следует, что

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \, .$$

Вероятность произведения К событий определяется формулой

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots A_K) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots P_{A_1 A_2 \cdots A_{K-1}}(A_K) \, .$$

Вероятность появления *хотя бы одного* из группы событий $A_1, A_2, \ldots A_K$ можно определить по формуле

$$P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_K) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \ldots \overline{A_K}) \, .$$

Если события A_1, A_2, . . . A_K взаимно независимы, то вероятность появления хотя одного события равна:

$$P(B) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \ldots P(\overline{A_K}) \, . \tag{10}$$

Если при этом $P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = \ldots = P(\overline{A_K}) = q$, *то* $P(B) = 1 - q^k$.

Итак, над событиями определено три операции: сложение, умножение и отыскание противоположного события. С помощью этих операций можно образовывать составные или сложные события. Вероятность составного события можно найти применяя рассмотренные выше понятия и формулы.

Примеры выполнения типовых заданий

Задача 5. В саду досажено два дерева. Вероятность того, что приживется первое дерево, равна 0,9, второе дерево – 0,8. Найти вероятность того, что приживутся: 1) два дерева; 2) одно дерево; 3) хотя бы одно дерево.

Решение. Введем следующие обозначения событий:

A_1 – прижилось первое дерево;

A_2 – прижилось второе дерево;

B – прижилось одно дерево;

C – прижилось два дерева;

D- прижилось хотя бы одно дерево.

Рассмотрим все возможные результаты посадки двух деревьев:

$A_1 \cdot A_2$ – прижились оба дерева;

$A_1 \cdot \overline{A_2}$ - первое дерево прижилось, а второе нет;

$\overline{A_1} \cdot A_2$ - первое дерево не прижилось, а второе прижилось;

$\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$ - оба дерева не прижились.

Видно, что $B = A_1 \cdot A_2$, $C = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2$, $Д = B + C$.

1) $P(B) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$;

2) $P(C) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) + \overline{A_1} \cdot A_2) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cdot A_2) =$

$= P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}26$,

т.к. события A_1 и A_2 независимы , события $A_1 \cdot \overline{A_2}$ и $A_1 \cdot \overline{A_2}$ несовместны и

$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 0{,}1$; $P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 0{,}2$;

3) $P(Д) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}998$.

Задача 6. В поле работают три мужчины и семь женщин. По табельным номерам наугад отбирают три человека. Найти вероятность того, что все отобранные рабочие окажутся женщинами.

Решение. Введем следующие обозначения событий:

A_1 –первый отобранный человек - женщина;

A_2 – второй отобранный человек - женщина;

A_3 – третий отобранный человек - женщина;

B – отобраны три женщины.

Событие B составное: $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3)$, т.к. события A_1, A_2, A_3 зависимы.

Сначала на поле находится 10 человек (3 мужчины и 7 женщин), поэтому

$$P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{7}{10}.$$

Если произошло событие A_1, то на поле осталось 9 человек (3 мужчины и 6 женщин), поэтому

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{m}{n} = \frac{6}{9}.$$

Обратите внимание, что $P_{\overline{A}_1}(A_2)=\frac{7}{9}$, т.е. $P_{A_1}(A_2)\neq P_{\overline{A}_1}(A_2)$.

Если произошли события A_1 и A_2, то на поле осталось 8 человек (3 мужчины и 5 женщин), поэтому

$$P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{m}{n}=\frac{5}{8}.$$

Теперь можно вычислить искомую вероятность:

$$P(B)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24}\approx 0{,}2917.$$

Замечание. Задача 6 может быть решена с использованием понятий комбинаторики:

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}\approx 0{,}2917.$$

Задача 7. Вероятность всхожести любого зерна пшеницы одинакова. Найти эту вероятность, если вероятность того, что взойдет хотя одно из трех посеянных зерен равна 0,992.

Решение. Введем следующие обозначения событий:

A – взошло хотя бы одно зерно;

B_1 – взошло первое зерно;

B_2 – взошло второе зерно;

B_3 – взошло третье зерно.

По условию задачи $P(B_1)= P(B_2) = P(B_3)=p$ и требуется найти p.

Событие A состоит в том, что из трех зерен взошло одно любое зерно или два любых зерна или все три зерна. Противоположным ему является событие $\overline{A}$ - не взошло ни одного зерна $\overline{A}=\overline{B}_1\cdot\overline{B}_2\cdot\overline{B}_3$.

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{B}_1\cdot\overline{B}_2\cdot\overline{B}_3).$$

Ясно, что события B_1, B_2, B_3 независимы, тогда и события $\overline{B}_1,\overline{B}_2,\overline{B}_3$ независимы.

$$P(A)=1-P(\overline{B}_1)\cdot P(\overline{B}_2)\cdot P(\overline{B}_3)=1-q\cdot q\cdot q=1-q^3,\quad q=1-p.$$

По условию задачи $P(A)$ = 0,992. Тогда

$0{,}992=1-q^3$;

$q^3=1-0{,}992=0{,}008$;

$q=\sqrt[3]{0{,}008}=0{,}2$ и $p=1-q=0{,}8$.

Задания для самостоятельной работы

41. Студент знает ответы на 20 из 30 вопросов, вынесенных на коллоквиум. Вопросы задаются последовательно. Какова вероятность того, что студент правильно ответит на три вопроса?

42. В вазе 10 яблок, из которых 3 червивых. Из вазы последовательно без возврата извлекаются три яблока. Найти вероятности событий: 1) все три яблока не червивые; 2) первое яблоко червивое, а остальные не червивые.

43. В семье трое детей. Пусть вероятности рождения мальчика и девочки каждой раз одинаковы . Найти вероятности того, что в семье: 1) все девочки; 2) два мальчика и одна девочка; 3) хотя бы один мальчик.

44. Три охотника одновременно стреляют в кабана. Вероятность попадания для первого охотника равна 0,9, для второго – 0,8 , для третьего – 0,7. Каковы вероятности событий: 1) в кабана попали две пули; 2) все охотники промахнулись?

45. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на 1-й вопрос равна 0,9, на 2-й – 0,7, на 3-й – 0,6. Найти вероятности того, что студент ответит: 1) на три вопроса; 2) только на один вопрос.

46. Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0,96. Найти вероятность трех попаданий при трех выстрелах, если вероятность попадания одинакова при каждом выстреле.

47. Сколько надо взять яиц, чтобы с вероятностью не менее 0,87 утверждать, что вылупится хотя бы одна курочка? Вероятности появления курочки и петушка из каждого яйца принять равными 0,5.

48. Среди 30 плодов три поражены болезнью. Найти вероятности того, что из трех взятых подряд и не возвращенных плодов: 1) один поражен болезнью; 2) нет пораженных болезнью.

49. Эффективность некоторой вакцины составляет 90 %. Вакцинировалось два животных. Каковы вероятности того, что: 1) оба животных приобрели иммунитет; 2) хотя одно животное приобрело иммунитет?

50. Найти вероятность уничтожения вредителей при четырехкратной обработке сада, если для гибели насекомых достаточно отравление хотя бы в одной из обработок и вероятность гибели насекомых при каждой обработке равна 0,8.

1.4. Формула полной вероятности и формула Бейеса

Пусть событие *A* может наступить только при условии появления одного из несовместных и образующих полную группу событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Тогда вероятность события А зависит от событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ и может быть вычислена по *формуле полной вероятности:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A). \qquad (11)$$

События $B_1, B_2, \ldots, B_n$ называются *гипотезами.* Сумма вероятностей гипотез равна единице: $P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1$. Отметим, что в результате испытания одна из гипотез обязательно реализуется, но заранее неизвестно какая именно.

Пусть до испытания вероятности гипотез были равны: $P(B_1), P(B_2),..., P(B_n)$. Если в результате испытания произошло событие *A*, то вероятности гипотез изменяются за счет появления дополнительной информации. Новые (условные) вероятности гипотез вычисляются по *формуле Бейеса:*

$$P_A(B_j) = \frac{P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}, \text{ для j=1,2,…,n.} \qquad (12)$$

Примеры выполнения типовых заданий

Задача 8. Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 30%; зерно второго сорта – 60%, зерно третьего сорта – 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта равна 0,8, второго сорта – 0,6, третьего – 0,5. Найти вероятность того, что взойдет одно наугад взятое зерно.

Решение. Событие А – наугад взятое зерно взошло. Гипотезы:

B_1 - выбрано и посеяно зерно первого сорта;

B_2 - выбрано и посеяно зерно второго сорта;

B_3 - выбрано и посеяно зерно третьего сорта;

До испытания вероятности гипотез равны: $P(B_1) = 0{,}3;\quad P(B_2) = 0{,}6;\quad P(B_3) = 0{,}1$,

т.к. зерно первого сорта составляет 30% от всего имеющегося зерна и т.д. Все условные вероятности события А даны в условии задачи $P_{B_1}(A) = 0{,}8;\quad P_{B_2}(A) = 0{,}6;$ $P_{B_3}(A) = 0{,}5.$

По формуле полной вероятности (11) получаем:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) =$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}24 + 0{,}36 + 0{,}5 = 0{,}65.$$

Задача 9. Две бригады собирают на своих полях помидоры и грузят их для отправки на один грузовик. Производительность сборки помидор первой бригады в два раза больше производительности труда второй. Первая бригада вырастила 60% помидор отличного качества, а вторая 84%. Наудачу взятый в грузовике помидор оказался отличного качества. Найти вероятности того, что взятый помидор выращен: 1) первой бригадой; 2) второй бригадой.

Решение. Событие А – взятый помидор оказался отличного качества. Гипотезы:

B_1 - помидор выращен первой бригадой;

B_2 - помидор выращен второй бригадой.

Требуется найти: $P_A(B_1), P_A(B_2)$.

Вероятности гипотез равны: $P(B_1) = 2/3; P(B_2) = 1/3,$ т.к. количество помидор в грузовике пропорционально производительности труда бригад при сборе помидор и производительность первой бригады в два раза больше производительности второй бригады. Условные вероятности события A до испытания пропорциональны процентному содержанию помидор отличного качества и равны: $P_{B_1}(A)=0{,}6$; $P_{B_2}(A)=0{,}84$.

Известно, что после испытания произошло событие A – взят помидор отличного качества. Вероятности гипотез после испытания - $P_A(B_1), P_A(B_2)$. Их можно найти по формуле Бейеса (12):

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}=\frac{2/3\cdot 0{,}6}{2/3\cdot 0{,}6+1/3\cdot 0{,}84}\approx 0{,}5882,$$

$$P_A(B_2)=\frac{1/3\cdot 0{,}84}{2/3\cdot 0{,}6+1/3\cdot 0{,}84}\approx 0{,}4118.$$

Задания для самостоятельной работы

51. В трех мешках находится картофель. В первом мешке повреждено 15% клубней, во втором – 5%, в третьем – 10%. Наудачу извлекается один клубень. Найти вероятности того, что клубень: 1) поврежден; 2) не поврежден.

52. В вазе два яблока. В нее сначала добавляется одно не червивое яблоко, а затем наудачу извлекается одно яблоко. Какова вероятность того, что извлеченное яблоко окажется не червивым, если равновероятны все варианты первоначального содержания вазы?

53. Из полного набора костей домино (28 шт.) наугад последовательно без возврата извлекают две кости. Найти вероятность того, что вторую извлеченную кость можно приставить к первой.

54. В трех ящиках находятся помидоры, в первом –10% зеленых, во втором – 15%, в третьем – 20%. Сначала из ящиков наугад отбирают 2, 3, и 5 помидор соответственно. Затем из них наудачу берут один помидор. Какова вероятность того, что он был отобран из первого ящика, если он оказался зеленым?

55. В первой урне 5 белых и 10 черных шаров, во второй – 3 белых и 7 черных. Из первой урны во вторую перекладывают один шар, а затем из второй наугад берут один шар. Найти вероятность того, что последний шар первоначально был в первой урне, если он оказался белым.

56. Вероятности попадания в цель 1-м, 2-м и 3 –м стрелками равны соответственно 0,6, 0,5 и 0,4. Жребий определил порядок выхода к мишени. Какова вероятность того, что этот выстрел произвел третий стрелок ?

57. Для посева заготовлено 40% зерна 1-го сорта, 50% - 2-го сорта и 10% - 3-го сорта. Всхожесть зерна 1-го сорта составляет 95%, 2-го – 90%, 3-го – 80%. 1) Найти вероятность того, что взойдет одно наугад взятое зерно.

2) Пусть зерно взошло. Найти вероятность того, что это было зерно третьего сорта.

58. В двух мешках находятся семена ячменя. Всхожесть семян из 1-го мешка составляет 80%, из 2-го – 90%. Из 1-го мешка наугад отбирают 4 зерна, а из 2-го 2 зерна. Затем из шести зерен наугад выбирают одно.

1) Какова вероятность того, что отобранное зерно взойдет?
2) Какова вероятность того, что отобранное зерно первоначально было в 1-м мешке, если известно, что оно взошло.

59. В хозяйстве имеется 7 гусеничных и 5 колесных тракторов. Вероятность того, что гусеничный трактор будет исправен в течение всей недели равна 0,9, а того, что колесный трактор - 0,8. Для работы направляется произвольно выбранный трактор.

1) Найти вероятность того, что он не сломается в течение недели.
2) Найти вероятность того, что работал гусеничный трактор, если он не ломался всю неделю.
3)

60. В каждой из трех ваз содержатся 6 черных и 4 белых шара. Из первой вазы наугад извлечен один шар и переложен во вторую, затем из второй вазы наугад извлечен один шар и переложен в третью. Найти вероятность того, что наугад извлеченный из третьей вазы шар окажется белым.

1.5. Повторение независимых испытаний. Схема Бернулли

Пусть производится серия однородных испытаний. Если вероятность некоторого события A в каждом испытании не зависит от результатов других испытаний, то испытания называются *независимыми*, иначе – *зависимыми*.

Серия однородных зависимых испытаний называется схемой урн. Серия однородных независимых испытаний называется схемой Бернулли. Например. В вазе 20 яблок, из которых 5 – червивые. Будем последовательно извлекать по одному яблоку. Если каждое яблоко возвращать в вазу, то серия испытаний соответствует схеме Бернулли, т.к. в каждом испытании вероятность извлечения червивого яблока не зависит от номера испытания и равна 5/20. Если яблоки не возвращать, то вероятность извлечения червивого яблока зависит от результатов предыдущих испытаний и серия испытаний соответствует схеме урн.

Рассмотрим здесь четыре теоремы, применяемые в схеме Бернулли. Пусть вероятность события A в каждом испытании не зависит от результатов других испытаний: $P(A) = p$.

Теорема Бернулли. Если серия испытаний соответствует схеме Бернулли и число испытаний невелико ($n \le 10$), то

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \tag{13}$$

где $P_n(k)$ - вероятность того, что события А произойдет в n испытаниях равно k раз;

C_n^k - число сочетаний из n элементов по k;

$q = 1 - p$ - вероятность события $\overline{A}$.

При n > 10 использование формулы Бернулли (13) крайне затруднительно.

Локальная теорема Лапласа. Если серия испытаний соответствует схеме Бернулли и число испытаний велико (n > 10), то

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (14)$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Значения функции $\varphi(x)$ для $0 \le x < 4$ приводятся в таблице 2 приложения 1. Отметим, что $\varphi(x \ge 4) \approx 0$ и $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

При небольших значениях p формула (14) дает значительную погрешность.

Теорема Пуассона. Если серия испытаний соответствует схеме Бернулли, число испытаний велико (n >10) и вероятность события в одном испытании мала (p < 0,01), то

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{где } \lambda = n \cdot p. \qquad (15)$$

Вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз равна сумме вероятностей $P_n(k_1), \quad P_n(k_1 + 1), \dots P_n(k_2)$:

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k).$$

Вероятности $P_n(k)$ вычисляются по одной из уже рассмотренных формул.

Интегральная теорема Лапласа. Если серия испытаний соответствует схеме Бернулли и число испытаний велико (n >10), то

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (16)$$

где $x_i = \dfrac{k_i - np}{\sqrt{npq}}; \qquad \Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$

Значения функции Лапласа - $\Phi(x)$ для $0 \le x \le 5$ приводятся в соответствующей таблице 1 приложения 1. Отметим, что $\Phi(x > 5) \approx 0{,}5$ и $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Примеры выполнения типовых заданий

Задача 10. Всхожесть семян равна 80%. Для опыта отбирают 5 семян. Найти вероятность того, что будет не менее четырех всходов.

Решение. Событие A – взошло одно наугад взятое семя. Событие B – из пяти семян взошло не менее четырех.

$$P(B) = P_5(k \geq 4) = P_5(4 \leq k \leq 5) = P_5(4) + P_5(5).$$

Вероятность всхожести любого семени не зависит от того, взойдут или нет другие семена. $P(A) = p = 0{,}8$ и $q = 1 - p = 0{,}2.$ Число испытаний (число посеянных семян) невелико (n = 5). Поэтому воспользуемся теоремой Бернулли:

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1 = 5 \cdot (0{,}8)^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096,$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 \cdot (0{,}8)^5 \approx 0{,}3277. \qquad P(B) = P_5(4) + P_5(5) \approx 0{,}7373.$$

Задача 11. Вероятность того, что приживется одно дерево, в среднем равна 0,85. В саду высадили 100 деревьев. Найти вероятность того, что приживется не менее 80 деревьев.

Решение. Событие A- прижилось одно наугад взятое дерево. Событие B – из 100 деревьев прижилось не менее 80.

Вероятность того, что приживется одно любое дерево, постоянна: $P(A) = p = 0{,}85.$ Число посаженных деревьев велико (n=100). Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P(B) = P_{100}(k \geq 80) = P_{100}(80 \leq k \leq 100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}85}{\sqrt{100 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15}} \approx \frac{15}{3{,}57} \approx 4{,}20,$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 100 \cdot 0{,}85}{\sqrt{100 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15}} \approx \frac{-5}{3{,}57} \approx -1{,}40.$$

$$P(B) \approx \Phi(4{,}20) - \Phi(-1{,}40) = \Phi(4{,}20) + \Phi(1{,}40) \approx 0{,}499968 + 0{,}4192 \approx 0{,}9192.$$

Значения $\Phi(4{,}20), \Phi(1{,}40)$ найдены по таблице функции Лапласа.

Задача 12. Засоренность семян сорняками составляет 0,2%. Найти вероятность того, что из 1000 отобранных семян 5 являются семенами сорняков.

Решение. Событие A – наугад взятое семя оказалось сорным. Событие B – из 1000 семян 5 оказались сорными.

Вероятность того, что любое наугад взятое семя окажется сорным, постоянна, т.е. основное условие схемы Бернулли выполняется. Число семян велико (n=1000), а вероятность события A мала ($p = 0{,}002$). Поэтому следует воспользоваться теоремой Пуассона:

$$P(B) = P_{1000}(5) \approx \frac{(1000 \cdot 0{,}002)^5}{5!} \cdot e^{-(10000{,}002)} = \frac{2^5}{120} \cdot e^{-2} \approx 0{,}0361.$$

Задания для самостоятельной работы

61. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что в семье три мальчика, если вероятности рождения мальчика и девочки каждый раз одинаковы.

62. Для опыта отбирают 4 зерна. Всхожесть каждого зерна составляет 70%. Найти вероятности того, что: 1) будет не менее трех всходов; 2) будет не более одного всхода.

63. Вероятность рождения бычка при отеле каждой коровы равна 0,5. Найти вероятности того, что от шести коров будет: 1) ровно 4 бычка; 2) не менее четырех телочек.

64. Студенту задается четыре вопроса. Он знает правильные ответы на 70% вопросов . Найти вероятности того, что студент ответит на 4, 3, 2, 1 или 0 вопросов.

65. Вероятность того, что из одного яйца вылупится петушок равна 0,5. Найти вероятности того, что из 100 яиц вылупится: 1) ровно 50 петушков; 2) ровно 45 курочек.

66. Какова вероятность того, что из 400 посеянных семян прорастет от 300 до 350, если вероятность прорастания каждого семени равна 0,8?

67. По мишени производится 100 выстрелов. Вероятность попадания при каждом из них равна 0,8. Найти вероятности того, что: 1) будет ровно 75 попаданий; 2) будет от 75 до 85 попаданий.

68. Найти вероятности того, что после отела сорока коров: 1) будет не менее 20 телочек; 2) будет не более 30 бычков. Вероятности рождения бычка и телочки можно считать одинаковыми.

69. В ящике 5000 деталей. Доля брака составляет 0.02%. Какова вероятность того, что в ящике ровно три бракованных детали?

70. Найти вероятность того, что из 1500 яиц будет ровно 5 бракованных, если доля брака составляет 0,3%.

В задачах 71. –75. в магазин входят n покупателей. Найти вероятность того, что k из них совершат покупки, если вероятность совершить покупки для каждого вошедшего p.

71. $n = 100$. $p = 0.9$. $k = 95$.
72. $n = 12$. $p = 0.2$. $k = 4$.
73. $n = 8$. $p = 0.3$. $k = 3$.
74. $n = 225$. $p = 0.64$ $k = 158$.
75. $n = 250$. $p = 0.81$ $k = 200$.

В задачах 76. – 80. дана вероятность p появления события A в каждом из n независимых испытаний. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие A появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз.

76. $n = 360$. $p = 0.8$. $k_1 = 280$ $k_2 = 300$.
77. $n = 490$. $p = 0.6$. $k_1 = 320$ $k_2 = 350$.
78. $n = 640$. $p = 0.9$. $k_1 = 500$ $k_2 = 540$
79. $n = 225$. $p = 0.2$. $k_1 = 50$. $k_2 = 60$.
80. $n = 810$. $p = 0.4$. $k_1 = 340$ $k_2 = 400$

2. Случайные величины

2.1. Дискретные случайные величины

Изучаемая (измеряемая) величина является закономерной (не случайной), если в результате повторения некоторого испытания она принимает практически одно и то же числовое значение. Если же в результате повторения испытания величина принимает существенно различные значения, то она является случайной. Мерой возможности того или иного значения случайной величины является вероятность этого значения.

Выявление законов распределения вероятностей дискретных и непрерывных случайных величин и расчет числовых характеристик таких величин являются интересными и важными задачами. Решение этих задач позволяет существенно прояснить ситуацию неопределенности, возникающую при наличии случайных результатов испытаний и сделать соответствующие вероятностные прогнозы.

Случайной называется величина, которая при повторении одного и того же испытания может принимать различные числовые значения. Для случайной величины до испытания невозможно определить какое именно значение она примет. Случайные величины обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: X, Y, Z,... .

Дискретной называется случайная величина, которая принимает отдельные, изолированные значения.

2.1.1. Ряд распределения дискретной случайной величины

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между возможными значениями случайной величины и вероятностями появления этих значений. Закон распределения дискретной случайной величины можно задать таблично, графически или аналитически.

Р*ядом распределения* дискретной случайной величины называется таблица, в которой перечислены ее возможные значения и вероятности появления этих значений:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \qquad (17)$$

где p_i - вероятность значения x_i.

Если изучаемая величина является случайной, то при реализации испытания имеется некоторая практическая и математическая неопределенность результата. Если возможные значения дискретной случайной величины равновероятны, то она называется *равномерно распределенной*. Для равномерно распределенной случайной величины нет никаких оснований выделить какие-то из ее значений. Такая величина является «абсолютно» случайной в условиях рассматриваемого испытания. Тогда как для неравномерно распределенной случайной величины можно указать более вероятные и менее вероятные значения.

Многоугольником распределения называется фигура, полученная после соединения отрезками точек $(x_i,\ p_i)$.

2.1.2. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

Например, для случайной величины X:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \tag{18}$$

$M(X)$ всегда лежит между $X_{\min}$ и $X_{\max}$ и является средневзвешенным по вероятностям значением случайной величины.

Математическое ожидание случайной величины обладает следующими свойствами:

$$M(C) = C,$$

где C – постоянная величина;

$$M(C \cdot X) = C \cdot M(X);$$
$$M(X + Y) = M(X) + M(Y);$$
$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M([X - M(X)]^2)$$

Для вычисления дисперсии можно пользоваться формулой:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i, \tag{19}$$

или формулой:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 \tag{20}$$

где $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i$ - математическое ожидание квадрата случайной величины X.

Дисперсия случайной величины обладает следующими свойствами:

$D(C) = 0;$

$D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X);$

$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{21}$$

2.1.3. Некоторые законы распределения дискретных случайных величин

Биномиальное распределение

Пусть некоторое испытание производится n раз и пусть каждый раз вероятность появления события А равна р. Такая серия испытаний соответствует схеме Бернулли. Событие А может произойти в серии от нуля до n раз. Обозначим через Х дискретную случайную величину – *число появлений события A в n испытаниях* . Ясно, что $x_k = k$, где $k = 0;1;2;\ldots n$. Ряд распределения случайной величины Х имеет вид:

x_k	0	1	2	…	k	…	n
p_k	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	…	$P_n(k)$	…	$P_n(n)$

. (22)

Если n невелико ($n \le 10$), то $P_n(k)$ можно найти по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \qquad (23)$$

где $P_n(k)$ - вероятность того, что события A произойдет в n испытаниях равно k раз;

C_n^k - число сочетаний из n элементов по k;

$q = 1 - p$ - вероятность события $\overline{A}$, т.е. события противоположного событию A.

Если n велико ($n > 10$) , то $P_n(k)$ можно найти по формуле Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (24)$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Значения функции $\varphi(x)$ для $0 \le x < 4$ приводятся в таблице (прилож.1). Отметим, что $\varphi(x \ge 4) \approx 0$ и $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Распределение (22) называется биномиальным, т.к. произведение $C_n^k p^k q^{n-k}$ есть общий член в разложении бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n q^0 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 p^0 q^n .$$

Геометрическое распределение

Пусть повторяется некоторое испытание и пусть каждый раз вероятность события A равна p. Данная серия испытаний завершается как только событие A происходит. Обозначим через X дискретную случайную величину – число испытаний, которое нужно произвести *до первого появления* события A.

Случайная величина X может принимать значения натуральных чисел: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; … $x_k = k$. Вероятность значений x_k определяется формулой:

$$P_k = q^{k-1} \cdot p, \qquad (25)$$

где $q = 1 - p$ – вероятность не появления события A в каждом испытании.

Например, вероятность первого появления события A в четвертом испытании равна: $p_4 = q \cdot q \cdot q \cdot p$, т.к. сначала в трех испытаниях событие A не произошло.

Ряд распределения рассматриваемой дискретной случайной величины X имеет вид:

x_k	1	2	3	…	k	…
p_k	p	$q{\cdot}p$	$q^2 \cdot p$	…	$q^{k-1} \cdot p$	…

. (26)

Распределение (26) называется *геометрическим,* т.к. вероятности значений случайной величины образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, для которой первый член равен p, а знаменатель равен q.

Гипергеометрическое распределение

Пусть некоторое множество S содержит N элементов (студентов, деталей и т.д.) и пусть среди них выделено некоторое подмножество T, содержащее M элементов (юношей, бракованных деталей и т.д.). Из множества S наугад выберем n элементов. Обозначим через X дискретную случайную величину – *число элементов подмножества T*, попавших в число n отобранных элементов множества S (число юношей из n отобранных студентов, число бракованных деталей из n отобранных деталей и т.д.). Случайная величина X может принимать значения: 0, 1, 2, …i,…m, где m ≤ n и m ≤ M. Вероятность значения x_i определяется формулой:

$$p_i = \frac{C_M^i \cdot C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}, \qquad (27)$$

где $C_a^в$ - число сочетаний из a элементов по $в$.

$$C_a^в = \frac{a!}{в!(a-в)!}, \qquad a! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots a, \quad 0! = 1.$$

Ряд распределения случайной величины X имеет вид:

x_k	0	…	i	…	m
p_k	$\frac{C_M^0 \cdot C_{N-M}^n}{C_N^n}$	…	$\frac{C_M^i \cdot C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}$	…	$\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

(28)

Распределение, определяемое рядом (28) называется *гипергеометрическим*.

Примеры выполнения типовых заданий

Задача 13. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, если известен ее ряд распределения:

x_i	-1	1	2	3
p_i	0,19	0,51	0,25	0,05

.

Решение. По формуле (18) получаем:

$$M(X) = x_i p_i + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 =$$
$$= -0{,}19 + 0{,}51 + 0{,}5 + 0{,}15 = 0{,}97.$$

Дисперсию найдем по формуле (20):

$$M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4 = 2{,}15$$

и

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 2{,}15 - 0{,}94 = 1{,}21.$$

Среднее квадратическое отклонение вычислим по формуле (21):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1{,}1.$$

Задача 14. Баскетболист бросает мяч в кольцо. Вероятность попадания в каждом броске равна 0,8. Найти вероятности того, что первое попадание произойдет при первом броске, при втором броске …, при пятом броске.

Решение. Введем в рассмотрение дискретную случайную величину X – число бросков необходимых для первого попадания по кольцу. По смыслу задачи ясно, что эта случайная величина распределена по геометрическому закону (10).

Вероятности отдельных значений случайной величины X найдем по формуле (9) с учетом того, что p = 0,8 и q = 1 – 0,8 =0,2.

$p_1=q^0 \cdot p = 0{,}8$; $p_2 = q^1 \cdot p= 0{,}2 \cdot 0{,}8= 0{,}16$; $p_3=q^2 \cdot p= p_2 \cdot q = 0{,}16 \cdot 0{,}2 = 0{,}032$;
$p_4 = 0{,}0064$; $p_5 = 0{,}00128$.

Задания для самостоятельной работы

81. Случайная величина X – число поросят от одной свиноматки. Найти математическое ожидание и дисперсию, если задан ряд распределения этой случайной величины.

x_i	4	5	6	7
p_i	0,22	0,32	0,28	0,18

.

82. По условию задачи 1.1. построить многоугольник распределения случайной величины X, найти среднее квадратическое отклонение и вероятность того, что $X \geq 6$.

83. Найти $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$ и построить многоугольник распределения, если известен закон распределения случайной величины Y.

y_i	-1	0	1	2	3
p_i	0,15	0,20	0,35	0,25	0,05

.

84. Найти значение переменной *a* и D(X), если ряд распределения дискретной случайной величины Z имеет вид:

z_i	90	100	110	120
p_i	a	0,31	0,33	a -0,1

.

85. Монету подбрасывают 4 раза. Найти ряд распределения вероятно стей для числа выпадений «герба» в этой серии испытаний.

86. Вероятность того, что приживется один саженец яблони равна 0,8. Высаживаются 3 яблони. Составить закон распределения вероятностей для числа прижившихся саженцев.

87. Игральный кубик подбрасывают n раз. Составить ряд распределения для числа подбрасываний до первого выпадения «шестерки».

88. В вазе 5 плодов, из которых 2 - червивые. Из вазы наугад последовательно извлекают по одному плоду. Если плод не червивый, то он возвращается в вазу, иначе повторение испытаний завершается. Найти закон распределения случайной величины X – числа извлеченных плодов до появления первого червивого плода.

89. В сборной команде 5 волейболистов, из них двое являются студентами агрономического факультета. Тренер заменяет троих игроков. Составить ряд распределения вероятностей для числа замененных студентов агрономического факультета.

90. На поле работают шесть человек, из них трое мужчин. Троих рабочих переводят на другое поле. Найти закон распределения вероятностей для числа женщин, остающихся работать на первом поле.

2.2. Непрерывные случайные величины

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать любое значение из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

2.2.1. Закон распределения непрерывной случайной величины

Непрерывная случайная величина может принимать бесконечное множество значений, поэтому закон распределения непрерывной случайной величины невозможно задать в форме ряда распределения. Для задания закона распределения непрерывной случайной величины обычно используется функция распределения вероятностей – $F(x)$ или плотность распределения вероятностей – $f(x)$.

Функция распределения вероятностей случайной величины X определяет вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее действительного числа x, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцию распределения называют также интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения случайной величины. $F(x)$ является неубывающей функцией. Она может принимать только значения, принадлежащие отрезку [0,1], т.е. $0 \le F(x) \le 1.$ Для дискретных случайных величин $F(x)$ является ступенчатой функцией, непрерывной слева.

Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(x_1, x_2),$ равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{29}$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет одно определенное значение, равна нулю: $P(X = x_i) = 0$. Поэтому

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X \le x_2).$$

Плотностью распределения вероятностей случайной величины называется функция

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{30}$$

Эту функцию часто называют дифференциальной функцией распределения или дифференциальным законом распределения непрерывной случайной величины. Плотность распределения является неотрицательной функцией, т.е. $f(x) \ge 0.$

Элементом вероятности для случайной величины X называется величина $f(x)dx,$ равная вероятности попадания значения случайной величины в элементарный интервал dx, примыкающий к точке x.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (x_1, x_2), равна определенному интервалу от плотности распределения вероятностей, взятому в пределах от x_1 до x_2:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{31}$$

В частности,

$$P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Функция распределения выражается через плотность распределения с помощью формулы:

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

2.2.2. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Основные числовые характеристики для непрерывных случайных величин X вычисляются по следующим формулам:

а) математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx; \tag{32}$$

б) дисперсия

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx; \tag{33}$$

или

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2, \tag{34}$$

где

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx; \tag{35}$$

в) среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, приведенные при рассмотрении дискретной случайной величины, справедливы и для непрерывной случайной величины.

2.2.3. Равномерное распределение

Пусть непрерывная случайная величина X может принимать любое значение из отрезка $[a; b]$ и пусть *вероятности* попадания этой случайной величины в любой промежуток шириной Δx *одинаковы*. Плотность распределения вероятностей для такой случайной величины постоянна: $f(x) = A$. Найдем A из условия

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx = 1;$$

$$\int_a^b A dx = 1;\; A \cdot x\Big|_a^b = 1\;;\; A(b-a) = 1;\; A = \frac{1}{b-a}.$$

Тогда плотность распределения вероятностей для случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a \le x \le b, \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases} \tag{36}$$

Такое распределение вероятностей называется *равномерным*, а случайная величина X называется *равномерно распределенной* на отрезке [a; b].

Отметим, что равномерно распределенные случайные величины являются «абсолютно» случайными в соответствующем испытании т.к. нет ни каких оснований выделить какие-то значения этой величины и считать их более вероятными чем другие.

Примеры выполнения типовых заданий

Задача 15. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{x^3}{8} & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и вероятность попадания X в интервал (1;2).

Решение. Плотность распределения найдем по формуле (30):

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{3x^2}{8} & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

M(X) и D(X) вычислим по формулам (32), (33) соответственно:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_0^2 x \cdot \frac{3x^2}{8}dx + \int_2^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + \frac{3}{8}\int_0^2 x^3 dx + 0 = \frac{3}{8}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{16}{4} - 0\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5;$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \frac{3}{2}]^2 f(x)dx = \int_0^2 [x - \frac{3}{2}]^2 \cdot \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{3}{8}\int_0^2 (x^2 - 3x + \frac{9}{4})x^2 dx =$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^2 (x^4 - 3x^3 + \frac{9}{4}x^2)dx = \frac{3}{8}\left(\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^4}{4} + \frac{9}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{32}{5} - \frac{48}{4} + \frac{24}{4}\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{128 - 240 + 120}{20}\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{8}{20} = \frac{3}{20} = 0{,}15.$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал (1;2) найдем по формуле (29):

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{8} - \frac{1^3}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875.$$

Задания для самостоятельной работы

91. Дана плотность распределения вероятностей случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ \text{при} \ x < 1, \\ 0{,}5 \ \ \text{при} \ 1 \le x \le 3, \\ 0 \ \ \text{при} \ x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятности попадания случайной величины в интервалы (1; 2) и (1,5; 2,5). Сделать чертеж.

92. Как известно, плотность распределения вероятностей для равномерно распределенной непрерывной случайной величины определяется формулой (20). Найти функцию распределения такой случайной величины. Сделать чертеж.

93. По условию задачи 91 найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

94. Дана интегральная функция распределения вероятностей случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ \text{при} \ x < 0, \\ x^2/4 \ \ \text{при} \ 0 \le x \le 2, \\ 1 \ \ \text{при} \ x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что $X \in (0;1)$. Найти дифференциальную функцию распределения. Сделать чертеж.

95. По условию задачи 94 найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

96. Дана дифференциальная функция распределения случайной величины Y:

$$f(y)=\begin{cases} 0 \ \ при \ y<1, \\ y-0{,}5 \ \ при\ 1\le y\le 2, \\ 0 \ \ при \ y>2. \end{cases}$$

Найти интегральную функцию распределения и вероятность того, что $Y\in(1{,}5;2)$. Сделать чертеж.

97. По условию задачи 96 найти вероятность того, что $Y\in(1;1{,}5)$ используя f(y). Найти дисперсию случайной величины Y.

98. Дана плотность распределения вероятностей для случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \ \ при \ x<0, \\ \sin x \ \ при \ \ 0\le x\le \pi/2, \\ 0 \ \ при \ x>\pi/2. \end{cases}$$

Найти функциюF(x). Сделать чертеж.

99. По условию задачи 98 найти вероятности попадания случайной величины X в интервалы (0; π/2) и (π/6; π/4), используя функции f(x) и F(x).

100. Дана интегральная функция распределения случайной величины Z:

$$F(z)=\begin{cases} 0 \ \ при \ z<0, \\ \sin z \ \ при\ 0\le z\le \pi/2, \\ 1 \ \ при \ z>\pi/2. \end{cases}$$

Найти f(z) и M(Z). Построить графики функций f(z) и F(z).

2.2.4. Нормальное распределение непрерывной случайной величины

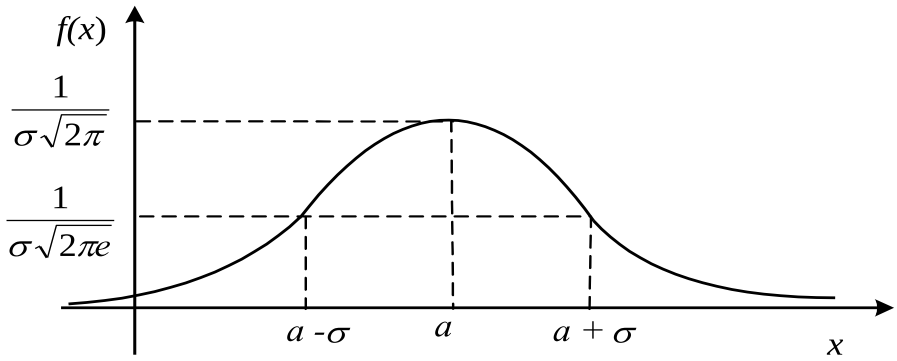
Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается следующей функцией плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (37)$$

где $a=M(X)$ - математическое ожидание,

$\sigma=\sigma(X)$ - среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X.

График функции (37) называется *нормальной кривой* или кривой Гаусса. Нормальная кривая имеет вид:



Функция $f(x)$ для нормально распределенной непрерывной случайной величины X обладает следующими свойствами:

1) $f(x) > 0$ для $x \in R$;

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;

3) кривая $y = f(x)$ имеет ось симметрии: $x = a$;

4) кривая $y = f(x)$ имеет единственный экстремум:

$$f_{\max}(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}};$$

5) кривая $y = f(x)$ имеет две точки перегиба:

$$f_{пер1}(a-\sigma) = f_{пер2}(a+\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}.$$

Вероятность того, что нормально распределенная непрерывная случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (x_1, x_2) можно найти по формуле:

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi(\frac{x_2 - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1 - a}{\sigma}), \quad (38)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ - функция Лапласа ее значения приводятся в таблице 1 приложения 1.

$a = M(X)$,

$\sigma = \sigma(X)$.

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной непрерывной случайной величины X от математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного положительного числа Δ можно найти по формуле:

$$P(|X - a| < \Delta) = P(a - \Delta < X < a + \Delta) = 2\Phi(\frac{\Delta}{\sigma}). \quad (39)$$

В частности при $\Delta = 3\sigma$

$P(a - 3\sigma < x < a + 3\sigma) = 2\Phi(3)$.

По таблице (прилож.2) находим, что $\Phi(3) \approx 0{,}49856$, тогда $2\Phi(3) \approx 0{,}99712$, т.е.

$$P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) \approx 1 \qquad (40)$$

Соотношение (40) позволяет сформулировать так называемое правило «трех сигм»: «Нормально распределенная случайная величина X практически не выходит за рамки интервала $(a - 3\sigma; \quad a + 3\sigma)$».

Примеры выполнения типовых заданий

Задача 16. Значения веса отдельных зерен распределены по нормальному закону. Математическое ожидание веса зерна равно 0,19, среднее квадратическое отклонение равно 0,04 г. Сильные всходы дают зерна, вес которых более 0,15г. 1) Найти вероятность того, что наугад взятое зерно даст сильные всходы; 2) Найт вес, который не превзойдет наугад взятое зерно с вероятностью 0,98.

Решение. X – непрерывная нормально распределенная случайная величина – вес отдельного зерна. $M(X) = a = 0{,}19$ г.

$\sigma(X) = \sigma = 0{,}04$ г.

1) Сильные всходы дают зерна, вес которых больше 0,15 г. Поэтому искомая вероятность есть P(X>0,15). Для определения этой вероятности воспользуемся формулой (22):

$$P(X > 0{,}15) = P(0{,}15 < X < +\infty) = \Phi(\frac{+\infty - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{0{,}15 - a}{\sigma}) =$$

$$= \Phi(+\infty) - \Phi(\frac{0{,}15 - 0{,}19}{0{,}04}) = 0{,}5 - \Phi(-1) = 0{,}5 + \Phi(1) \approx 0{,}5 + 0{,}3413 = 0{,}8413.$$

Здесь использованы два свойства функции Лапласа:
$\Phi(+\infty) = 0{,}5;\ \Phi(-x) = -\Phi(x)$. Значение $\Phi(1)$ найдено по таблице 1 приложения 1.

2) Обозначим искомый вес через y. Случайная величина X не превзойдет этот вес с вероятностью 0,98, т.е. $P(X \le y) = 0{,}98$. $P(X \le y) = P(-\infty < X \le y) = 0{,}98$. Значит $P(-\infty < X < y) = 0{,}98$.

С другой стороны, по формуле (22) получаем:

$$P(-\infty < X < y) = \Phi(\frac{y - a}{\sigma}) - \Phi(-\infty) = \Phi(\frac{y - a}{\sigma}) + \Phi(+\infty) = \Phi(\frac{y - 0{,}19}{0{,}04}) + 0{,}5.$$

Величину y можно найти, решив уравнение:

$$\Phi(\frac{y - 0{,}19}{0{,}04}) + 0{,}5 = 0{,}98$$

или

$$\Phi(\frac{y - 0{,}19}{0{,}04}) = 0{,}48$$

Зная значения функции Лапласа (0,48), по таблице прилож. 2 находим соответствующее значение аргумента (2,06):

$$\frac{y-0{,}19}{0{,}04}\approx 2{,}06.$$

Тогда $y-0{,}19\approx 0{,}08$ и $y\approx 0{,}27$.

Это означает: с вероятностью 0,98 можно утверждать, что вес наугад взятого зерна не превзойдет 0,27 г.

Задача 17. Норма высева семян на 1 гектар равна 220 килограмм. Фактический расход семян колеблется около этого значения со средним квадратическим отклонением 10 кг. Найти: 1) вероятность того, что расход семян на 150 га не превысит 33,2 тонны; 2) количество семян, которого хватит для посева 150 га с вероятностью 0,99.

Решение. Случайная величина X – расход семян на 150 га; случайные величины $\mathrm{Y}_i(i=1,2,\ldots,150)$ - расход семян на i -том гектаре.

По условию задачи норма (математическое ожидание) высева семян и среднее квадратическое отклонение одинаковы для каждого из ста пятидесяти гектар равны между собой.

$$M(Y_1)=M(Y_2)=\ldots=M(Y_{150})=220 \text{ кг};$$
$$\sigma(Y_1)=\sigma(Y_2)=\ldots=\sigma(Y_{150})=10 \text{ кг};$$
$$D(Y_i)=[\sigma(Y_i)]^2=100 \text{ кг}, \qquad (i=1,2,...,150).$$

Случайную величину X можно представить как сумму случайных величин Y_i: $X=Y_1+Y_2+\ldots+Y_{150}$. Случайная величина, являющаяся суммой соизмеримых независимых случайных величин, распределена по нормальному закону. В данном примере указанным требованиям отвечает случайная величина X, значит она распределена нормально.

Найдем числовые характеристики случайной величины X, учитывая, что математическое ожидание (дисперсия) суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий (дисперсией) слагаемых:

$$M(X)=M(Y_1+Y_2+\ldots+Y_{150})=M(Y_1)+M(Y_2)+\ldots+M(Y_{150})=150M(Y_i)=$$
$$=150\cdot 220=33000 \text{ кг} =33 \text{ т};$$
$$D(X)=D(Y_1+Y_2+\ldots+Y_{150})=D(Y_1)+D(Y_2)+\ldots+D(Y_{150})=$$
$$=150\cdot 100=15000 кг^2$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{15000}\approx 122 \text{ кг} =0{,}122 \text{ т}.$$

1) Искомую вероятность можно записать в виде:

$$P(X\le 33{,}2).$$

$$P(X\le 33{,}2)=P(X<33{,}2)=P(-\infty<X<33{,}2)=\Phi(\frac{33{,}2-33}{0{,}122})-\Phi(-\infty)=$$

$$=\Phi(\frac{0{,}2}{0{,}122})+\Phi(+\infty)=\Phi(1{,}64)+0{,}5\approx 0{,}4495+0{,}5\approx 0{,}95,$$

где $\Phi(1{,}64)\approx 0{,}4495$ (прилож.2).

2) Количество семян необходимое для посева 150 га обозначим через y.

Будем искать y из условия $P(X < y) = P(-\infty < X < y) = 0{,}99.$
По формуле (22) получаем

$$P(-\infty < X < y) = \Phi(\frac{y-33}{0{,}122}) - \Phi(-\infty) = \Phi(\frac{y-33}{0{,}122}) + 0{,}5.$$

Теперь необходимо решить уравнение:

$$\Phi(\frac{y-33}{0{,}122}) + 0{,}5 = 0{,}99 \text{ или}$$

$$\Phi(\frac{y-33}{0{,}122}) = 0{,}49.$$

Значение аргумента (2,32) находим по таблице функции Лапласа (прилож.2).

$$\frac{y-33}{0{,}122} \approx 2{,}32\,.$$

Тогда $y - 33 \approx 0{,}28$ и $y \approx 33{,}28.$

Это означает, что с вероятностью 0,99 можно утверждать: «33,28 тонны семян хватит для посева 150 га.»

Задания для самостоятельной работы

101. Длина стебля пшеницы *нормально распределенная* случайная величина X. Известно, что M(X) = 80 см, σ(X) = 10 см. Найти вероятности того, что значения случайной величины принадлежат интервалам (70; 90) и (50; 70).

102. По условию задачи 101 найти значение длины стебля, ниже которого находятся 30% стеблей пшеницы.

103. Вес поросенка есть случайная величина, *распределенная по нормальному закону.* Установлено, что математическое ожидание этой случайной величины равно 50 кг, а дисперсия равна 25 кг^2. Какой процент от общего количества поросят на ферме имеет вес: а) ниже 40 кг; б) выше 55 кг.

104. По условию задачи 101 найти значение веса, выше которого находятся только 10% поросят.

105. Значения веса одной груши *распределены по нормальному закону*, при этом математическое ожидание веса и его среднее квадратическое отклонение равны 150 г. и 20 г. соответственно. Найти вероятности того, что вес наугад взятой груши: а) больше 200 г; б) меньше 120 г.

106. По условию задачи 105 найти значение веса, ниже которого находятся только 20% общего количества груш.

107. Глубина посева семян является *нормально распределенной* случайной величиной. Средняя глубина посева составляет 3 см., дисперсия глубины посева составляет 1 см^2. Найти доли семян посеянных на глубину: а) не менее двух сантиметров; б) не более одного сантиметра.

108. По условию задачи 107 указать какая глубина посева не будет превышена с вероятностью 0,95.

109. Суммарный вес плодов, находящихся в одном ящике в среднем составляет 10 кг., а дисперсия этого веса составляет 0,64 кг^2. Найти вероятности того, что в *100 ящиках* окажется: а) менее 900 кг; б) более 1050 кг.

110. По условию задачи 109 найти вероятность того, что *в 150 ящиках* окажется от 1400 кг до 1560 кг. плодов.

В задачах 111.-130. непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение. Ее математическое ожидание равно M_x, среднее квадратичное отклонение равно σ_x. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале (α,β).

Задача	M_x	σ_x	α	β	**Задача**	M_x	σ_x	α	β
111	10	1	8	14	**121**	32	3	27	36
112	12	2	8	14	**122**	34	1	30	37
113	14	3	10	15	**123**	36	2	30	41
114	16	2	15	18	**124**	38	3	34	42
115	18	1	16	21	**125**	40	2	39	42
116	20	1	16	22	**126**	40	4	36	43
117	24	2	17	26	**127**	38	2	35	40
118	26	1	20	27	**128**	42	4	40	43
119	28	3	23	30	**129**	44	5	41	45
120	30	1	24	35	**130**	45	5	43	48

Литература

1. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебник для вузов / Н.Ш. Кремер. - Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. - 543 с.

2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учебное пособие для студентов вузов / В.Е.Гмурман. – 7-е изд. - Москва : Высшая.школа, 2003. - 405 с.

3. Дегтярь, Л.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебное пособие для самостоятельной работы студентов / Л.А. Дегтярь, А.Г. Мокриевич. – Персиановский : ДонГАУ, 2013. - 108 с. – Режим доступа : http://ebs.rgazu.ru/?q=node/4334

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

МАТЕМАТИКА :
ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Для обучающихся по направлениям подготовки бакалавриата

Составитель: Мокриевич Алексей Геннадьевич

Подписано в печать 05.06.2019 г. Формат 60х84 1/16/
Бумага офсетная. Гарнитура шрифта Times/
Усл. печ. л. 1,875. Уч.- изд. л. 2,0.
Тираж 30. Заказ № 89015

Отдел оперативной полиграфии НГМИ Донской ГАУ
346428 г. Новочеркасск, ул. Пушкинская, 111